XIX Российский Фестиваль юных математиков

Финал. Решения.

1. Индукция по n и k. При $k=1$ годится $N=n(n-1)+1$, при $n=1$ годится $N=1$. Пусть $n>1$ и $k>1$. Положим $N(n,k):=N(n,k-1)(nk-k)+1$ Из наших N множеств выберем максимальное количество попарно непересекающихся, их не более чем $n-1$ (иначе нашли соцветие). Один из их элементов, которых не больше, чем $nk-k$, содержится хотя бы в $N/(nk-k)$ множеств. Так что так как $N/(nk-k)>N(n,k-1)$, то из $N/(nk-k)$ множеств мощности с общим элементом можно выбрать соцветие.

2. Умножим f и g на общий знаменатель их коэффициентов, получим два многочлена с целыми коэффициентами (снова f и g). Пусть $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$. Заметим, что если $f(x)$ целое, то $x=t/a_n$ с целым t. Условие на t таково: $a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}a_n+\dots+a_0a_n^n$ делится на a_n^n. Поэтому множество тех t, для которых $f(t/a_n)$ принимает целые значения, есть объединение (конечного числа) арифметических прогрессий с разностью a_n^n. Не умаляя общности, f и g имеют положительные старшие коэффициенты (иначе заменим $f(x)$ на $f(-x)$ при нечетном n или оба f и g на $-f$, $-g$ при четном n). Выпишем все достаточно большие (принимаемые на лучах монотонности) положительные целые значения f в порядке возрастания: $m_1<m_2<\dots$. Заметим, что если $f(t)=m_k$, то $f(t+a_n^n)=m_{k+T}$ при фиксированном T. Это понятно для многочлена нечетной степени. Для многочлена четной степени надо понять, как связаны значения в возрастающей и убывающей прогрессиях. С некоторого момента они либо при подходящем сдвиге совпадают, либо перемежаются. Аналогично для второго многочлена $g=b_kt^k+\dots+b_0$ при $g(t_1)=m_k$ получаем $g(t_1+b_k^k)=m_{k+T'}$. Значит, $f(t+p\cdot a_n^n\cdot T')=m_{k+pTT'}=g(t_1+p\cdot b_k^k\cdot T)$ при всех натуральных p. А тогда и при всех вещественных p, что и требовалось.

3. Лемма 1. $F_{5k}=F_k(25F_k^4-25F_k^2+5)$ при нечетном k.

Доказательство. Вспомним, что $F_n=(\alpha^n-\beta^n)/\sqrt5$ при $\alpha=(1+\sqrt5)/2$, $\beta=(1-\sqrt5)/2$. Подставим и получим.

Лемма 2. Если $F_n=nk$, то F_{nk} делится на nk.

Доказательство. Имеем

$$F_{nk}=(\alpha^{nk}-\beta^{nk})/\sqrt5=F_n\left((\alpha^n)^{k-1}+(\alpha^n)^{k-2}\beta^n+\dots+(\beta^n)^{k-1}\right).$$

Выражение в скобках есть целое число (оно симметрично по α, β и имеет целые коэффициенты).

Из леммы 1 получаем, что F_{5^n} делится на 5^n, но не делится на 5^{n+1}, причем $F_{5^n}/(5F_{5^{n-1}})$ взаимно просто с $F_{5^{n-1}}$. Отсюда ясно, что количество простых делителей числа F_{5^n} неограниченно возрастает. Из леммы 2 понятно, что в качестве n можно взять F_{5^n}.

4. Прямая PQ проходит через середину M отрезка AB как радикальная ось окружностей. Отметим на луче MC такую точку K, что $MK\cdot MC=MA^2$. Тогда точки P,Q,K,C лежат на одной окружности. Если $K=C$, то окружность PQC касается прямой PQ.

5. Если r_1 и r_2 — радиусы окружностей, то оба отрезка MC и NF равны $2r_1r_2/(r_1+r_2)$ (можно посчитать из подобия треугольников), так что $MCNF$ — параллелограмм.

6. Ответ: таких операций нет. Положим $f(t)=t\star t$. Тогда $f(f(t))=f(t)+t$. Отсюда если $t=s$, то $s=t$. полагая $t=0$ получаем $f(f(0))=f(0)$, откуда по замеченной инъективности $f(0)=0$.

Пусть $a=a_0\star 0$, $a_0\in\mathbb{R}$. Тогда $a\star 0=(a_0\star 0)\star(0\star 0)=a_0\star 0+0=a$. Положим $b=0\star a$, $c=a\star a$. Тогда $a\star b=(a\star 0)\star(0\star a)=c$ и $b\star a=(0\star a)\star(a\star 0)=a$. Значит $2a=(a\star a)\star(a\star 0)=c\star a=(a\star b)\star(b\star a)=b+c$. Кроме того, $b\star b+a=(b\star a)\star(a\star b)=(b\star a)\star(a\star a)=b\star a+a=2a$, $b\star b=a$. Отсюда $c=a\star a=(b\star b)\star(b\star b)=b+b\star b=b+a$. Раз $c=b+a$, $2a=b+c$, получаем $c=3a/2$, $b=a/2$. Аналогично, начиная с $b=0\star a$ мы получим, что $b\star b=3b/2$. С другой стороны, $b\star b=a=2b$, так что $a=b=0$. Итак, $x\star 0=0$ для всех вещественных x, аналогично $0\star x=0$. Тогда $0=(0\star 1)\star(1\star 0)=1$ — противоречие.

7. Пусть $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$. Индукция по n. База $n=1$ очевидна. Пусть $n=2$. Тогда если точка a или b лежит между x_1 и x_2, то $|f(a)|=|(x_2-a)(a-x_1)|\leqslant(x_2-x_1)^2/4<1$. Если же $a<x_1<x_2<b$, то $f(a)f(b)=g(x_1)g(x_2)$, где $g(x)=(x-a)(x-b)$, так что аналогично $|f(a)f(b)|<1$. Пусть $n\geqslant 3$ и нашелся многочлен f как в условии. Если обе точки a, b лежат в отрезке $[x_1,x_n]$, то сократим f на $(x-x_1)(x-x_2)$ — значение в точках a, b только увеличится по модулю. Пусть не умаляя общности $a<x_1$. Тогда можно заменить a на -1, $f(a)$ возрастет. Все $x_i>b$ можно заменить на 1, $|f(b)|$ и $|f(-1)|$ возрастут. Все x_i от -1 до b можно заменить на их среднее арифметическое p, $|f(-1)|$ и $|f(b)|$ возрастут по неравенству о средних. Получим многочлен $f(x)=(x-1)^k(x-p)^m$, $-1<p<0<b$ (иначе очевидно $f(b)<1$). Если $2(p+1)<1$, то заменим f на $f/(x-1)(x-p)$, $|f(-1)|$ и $f(p)$ возрастут. Если же $2(p+1)\geqslant 1$, $p\geqslant -1/2$, то из $|f(b)|\geqslant 1$ имеем $1\leqslant|f(b)|=(1-b)^k(b-p)^m$ имеем $b-p>1$, $b>1/2$. Тогда $|f(b)f(-1)|=(2(1-b))^k((b-p)(1+p))^m<1^k\cdot 1^m$ — противоречие.

8. Назовем три клики клики из условия A, B, C. Рассмотрим дополнительный граф. Заметим, что в нем есть паросочетание между долями A, B. В самом деле, если не выполняется условие леммы о девушках, то найдется антиклика (в исходном графе клика) размера $>n$. Аналогично, есть паросочетания между A и C, между B и C. Рассмотрим ребра этих паросочетаний. Они разбиваются на чередующиеся циклы длины, кратной 3. Треугольники покрасим в свои цвета, циклы четной длины разобьем на пары смежных, циклы нечетной длины $2k+1$, $k\geqslant 4$, покрасим в $k+1$ цвет (пары смежных и одна вершина). Тогда в каждом цикле длины m использовано не больше, чем $5m/9$ цветов, значит всего цветов не больше, чем $5n/3$.

9. Оценим количество вариантов, при которых победитель не единственный. Тогда найдется одна из n задач A такая, что максимум результата решивших задачу студентов A равен максимуму среди нерешивших. Если зафиксировать оценки за остальные задачи ($(2n)^{n-1}$ способов), получится, что оценка за A определяется (не более чем) однозначно. Суммируя по всем задачам, получаем, что количество вариантов с неединственным победителем не больше, чем $n(2n)^{n-1}=\frac12(2n)^n$, то есть не больше половины.

10. Достаточно построить такую последовательность, периодичную по любому модулю вида p^k, p простое. Наши периоды T_{p^k} по модулям p^k будут появляться не сразу, но так, $T_{p^k}=p^n$ при подходящем $n>k$. Мы будем определять члены последовательности a_k пошагово, причем шаги бывают трех типов:

1) Определить a_k при данном k.

2) Определить m такое, что $a_m=\alpha$ при данном натуральном α.

3) Определить очередное T_{p^k}. Этот шаг мы будем делать лишь тогда, когда числа от 1 до p^k уже появились в нашей последовательности.

Если мы сможем так действовать, то в итоге построится последовательность.

Покажем, как выполнять шаги. Число p^k, для которого T_{p^k} уже определено, назовем важным. Номер s, для которого a_s определено, назовем обслуженным.

1) Найдем для всякого важного числа p^m такой обслуженный номер s, что $k-s$ делится на T_{p^m}. Если такого не найдется, попробуем p^{m-1} и так далее пока не найдется. Потребуем, чтобы $a_k \equiv a_s$ по модулю p^m. Так мы зададим остатки a_k по взаимно простым степеням простых чисел. Число a_k с такими остатками найдется. Оно нам подойдет.

2) Для всякого важного p^k найдем такой обслуженный номер s, что $a_s \equiv \alpha$ по модулю p^k. Он найдется по свойству из шага 3. Потребуем сравнения $s \equiv m$ по модулю T_{p^k}. Так сделаем для всех важных чисел, причем для важных чисел с данным p достаточно делать для наибольшего важного числа вида p^k. Опять же подходящее m найдется.

3) Как только все числа от 1 до p^k появились, определим T_{p^k} как огромадную степень p.